Zur schrittweisen Fehlerfortpflanzung:

Behauptung:
„Schrittweise" und „zusammengefasste" Fehlerfortpflanzung bezüglich dreier **unabhängiger** Messgrößen a, b und c, die in eine berechnete Größe z eingehen, sind äquivalent, solange man entweder nur statistische oder nur systematische Fehler ansieht, d.h. solange man die **statistischen und die systematischen Fehler strikt trennt.**

Beweis (ohne Gewähr!):
Seien drei Messgrößen a, b und c gegeben; die berechnete Größe h hänge von b und c ab; ferner existiere eine berechnete Größe z(a,b,c), welche sich auch als z(a,h) schreiben lasse.

Nun soll zunächst der **statistische Fehler** der Größe z berechnet werden. Dazu gibt es mit obigen Setzungen jetzt zwei mögliche Wege:

a) Berechnung aus den Fehlern von a, b und c durch quadrat. Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial c}\Delta c\right)^2}$$

b) Berechnung aus dem Fehler für a und dem Fehler für h (der durch quadratische Fehlerfortpfanzung aus den Fehlern für b und c entsteht):

$$\Delta h = \sqrt{\left(\frac{\partial h}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial c}\Delta c\right)^2}$$

$$\Rightarrow \Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial h}\Delta h\right)^2} \overset{\Delta h \text{ von oben}}{=} \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial a}\Delta a\right)^2}$$

um den hinteren Ausdruck zu vereinfachen, benutzen wir die Gleichheit des totalen Differenzials von z(a,b,c) mit dem von z(a,h).

$$\frac{\partial z}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial z}{\partial b}\mathrm{d}b + \frac{\partial z}{\partial c}\mathrm{d}c = \mathrm{d}z(a,b,c) = \mathrm{d}z(a,h) = \frac{\partial z}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial z}{\partial h}\mathrm{d}h = \frac{\partial z}{\partial a}\mathrm{d}a + \frac{\partial z}{\partial h}\left(\frac{\partial h}{\partial b}\mathrm{d}b + \frac{\partial h}{\partial c}\mathrm{d}c\right)$$

Da db und dc unabhängig voneinander sind, ergibt sich sofort:

$$\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial b} \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial c} = \frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial c}$$

Diese Identitäten sind wohlgemerkt **nichttrivial,** da das allseits beliebte „Differenziale kürzen" – d.h. Anwendung der Leibnizschen Form der Kettenregel – bei partiellen Ableitungen i.A. freilich nicht erlaubt ist. (Allerdings kann man sie mit ein bisschen Erfahrung auch ohne das totale Differenzial von z sofort bekommen.)

Daraus folgt sofort:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial a}\Delta a\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right)^2} \quad \text{, q.e.d.}$$

Denselben Beweis kann man analog für den **systematischen Fehler** führen:

a) 1. Berechnungsart (aus den Fehlern für a, b, c durch lineare Fehlerfortpflanzung)

$$\Delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial b}\Delta b\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial c}\Delta c\right|$$

b) Schrittweises Vorgehen:

$$\Delta h = \left|\frac{\partial h}{\partial b}\Delta b\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial c}\Delta c\right|$$

$$\Rightarrow \Delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial h}\Delta h\right| \overset{\Delta h \text{ von oben}}{=} \left|\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial h}\left(\left|\frac{\partial h}{\partial b}\Delta b\right| + \left|\frac{\partial h}{\partial c}\Delta c\right|\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial b}\Delta b\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial c}\Delta c\right| \overset{\text{wie beim stat. Fehler}}{=} \left|\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial b}\Delta b\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial c}\Delta c\right|$$

q.e.d.